EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x+2}{x+2} & \text{si } x>0\\ 3-\sqrt{x^2+4} & \text{si } x\le 0\end{cases}$$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ a) Montrer que f est continue en 0

b) Déterminer le domaine de continuité de f

3/ a) Montrer que f n'est pas dérivable en 0

b) Déterminer les équations cartésiennes des demies tangentes à (C_f) au point A (0,1) ; (C_f) étant la courbe représentative de f dans un repère cartésien

4/a) Calculer la fonction dérivée de f sur chaque intervalle.

b) Dresser le tableau de variation de f sur IR

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

1/a) Etudier la variation de f

b) Ecrire une équation de la demi tangente (T) à ζ_f au point d'abscisse 1

c) Tracer (T) et ζ_f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

2/Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]1,2[$ une unique solution α

3/a) Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

b) En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$

4/ Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=2$ et $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

b) Déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}$ et déduire la limite de u

Exercice N°3:

1/ Soit la fonction $g(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

a) Montrer que g est dérivable sur $]-2,-2[$ puis calculer $g'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) Déduire que l'équation g(x)=0 admet une solution unique α dans $]-2,-2[$

d) Donner alors le signe de g(x) sur $]-2,-2[$

2/ Soit la fonction $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$

a) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en (- 2) ; Interpréter graphiquement les résultats

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Tracer ζ_f dans un RO.N $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3/a) Monter que pour $x\in[0,1]$ on a $|f'(x)|\leq 1$

b) En déduire que pour $x\in[0,1]$ on a $|f(x)-2|\leq x$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie sur □ par $f(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$

b) Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que pour tout réel x : $f(x) > 0$.

3) Soit g la fonction définie sur □ par : $g(x)=f(x)-x$

a) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x)\leq 1$

a) En déduire le tableau de variation de g.

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans □ et que $\alpha\in\left]\sqrt{3},2\right[$

c) En déduire la position relative de la courbe (ζ_f) de f et la droite Δ : $y = x$